第三章主要内容

3.1 n维随机向量

3.2 条件分布

3.3 随机变量的相互独立性

3.4 随机向量的函数及其概率分布

第四章 随机变量的数字特征

人工智能学院
周三平
Email: spzhou@xjtu.edu.cn

本章主要内容

4.1 数学期望

4.2 方差

4.3 协方差与相关系数 矩

§4.1 数学期望

4.1.1 数学期望的定义

案例分析：某车间生产自行车配件，质检员从一大批配件中随机抽取n件检查。用X表示检查出次品的件数。如果检查了N天，查出次品数为0，1，2，…，n个的天数分别为m_0，m_1，m_2，…，m_n，显然有$N=m_0+m_1+m_2+m_n$，则平均每天查出次品个数为：

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n} k m_k = \sum_{k=0}^{n} k\frac{m_k}{N}$$

§4.1 数学期望

4.1.1 数学期望的定义

由于$\frac{m_k}{N}$是N次试验中出现k个次品的频率，当N充分大时，频率$\frac{m_k}{N}$将接近于X取k的概率，即

$$p_k = P\{X = k\} = \frac{m_k}{N}$$

因此：

$$\sum_{k=0}^{n} k \frac{m_k}{N} \approx \sum_{k=0}^{n} k p_k$$

§4.1 数学期望

4.1.1 数学期望的定义

表明：当试验次数很大，随机变量X的观测值的算术平均值$\sum_{k=0}^{n} k\frac{m_k}{N}$将接近于$\sum_{k=0}^{n} kp_k$。由于$\sum_{k=0}^{n} kp_k$不依赖于试验次数$N$，也不受这$N$次试验是由何人所做的影响，因此可以表征为**随机变量的某种客观属性**。

§4.1 数学期望

4.1.1 数学期望的定义

数学期望(Mathematical Expectation)是一个随机变量的平均取值，是它所有可能取值的加权平均，权值是这些可能值相应的概率。

意义：反映随机变量平均取值的大小。

分为两类情况：离散型变量期望 和 连续型随机变量期望

§4.1 数学期望

离散随机变量的数学期望

如果ξ的分布律为

$$P(\xi = x_i) = p_i \qquad i = 1, 2, \cdots$$

若级数$\sum_{i=1}^{+\infty}|x_i|p_i$收敛，则称级数$\sum_{i=1}^{+\infty}x_i p_i$为随机变量的数学$\xi$期望，记为$E(\xi)$

级数绝对收敛的条件保证了期望不受求和顺序的影响

§4.1 数学期望

几种常见离散分布的数学期望：

1. 0–1分布：

X	0	1
p_k	$1-p$	p

$$E(X)=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p$$

2. 二项分布：

$X \sim b(n,p)$.

$$p_k=P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} kp_k=\sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k}=np(p+q)^{n-1}=np.$$

§4.1 数学期望

3. 泊松分布： $X \sim P(\lambda)$

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

§4.1 数学期望

4. 几何分布： $P\{X=k\}=q^{k-1}p,\ k=1,2,\cdots$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kp_k=\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}(q^k)'=p\Big(\sum_{k=1}^{\infty}q^k\Big)'$$

$$=p\Big(\frac{q}{1-q}\Big)'=p\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}.$$

§4.1 数学期望

绝对收敛要求：

随机变量 ξ 取值 $x_k=(-1)^k\dfrac{2^k}{k},\ k=1,2,\cdots$，对应的概率为 $p_k=\dfrac{1}{2^k}$，

求该变量的数学期望

由于 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\infty.$

所以变量 ξ 的数学期望不存在

§4.1 数学期望

连续随机变量的数学期望

如果变量ξ的密度函数$p(x)$满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |xp(x)|\,dx < \infty,$$

则连续随机变量的数学期望是积分：

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx,$$

否则称为这个随机变量的期望不存在

§4.1 数学期望

几种常见连续分布的数学期望：

5. 均匀分布：

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

X数学期望为：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}.$$

§4.1 数学期望

6. 指数分布：

$$p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

X数学期望为：

$$E(X)=\int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx=\int_0^{+\infty} xd(-e^{-\lambda x})$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\lambda}$$

§4.1 数学期望

7. 正态分布：

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\qquad x\in R$$

X数学期望为：

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

令$t=\dfrac{(x-\mu)}{\sigma}$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+\mu)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\mu$$

§4.1 数学期望

绝对收敛要求：

柯西分布： $p(x)=\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1+x^2},-\infty<x<+\infty,$

由于 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|x|\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx=2\int_0^{\infty}\frac{x}{\pi(1+x^2)}dx=\infty,$

故数学期望不存在。

§4.1 数学期望

4.1.2 随机变量的函数的数学期望

单变量函数Y=g(X)，其中X为随机变量，g为连续函数

- 当X为离散变量，满足分布律 $p_k = P\{X = x_k\}, k = 1,2,\cdots$

  若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$ 绝对收敛，则

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k,$$

- 当X为连续变量，满足概率密度 $f(x)$

  若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛，则

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

§4.1 数学期望

案例1. 设离散随机变量X的分布律为

X	-1	0	1
p_k	$1/3$	$1/3$	$1/3$

求随机变量$Y=X^2$的数学期望

解:

Y	0	1
p_k	$1/3$	$2/3$

$$\therefore \quad E(Y)=1\cdot\frac{2}{3}+0\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

§4.1 数学期望

案例2. 设设风速V在$(0, a)$上服从均匀分布，飞机机翼受到的压力 $W=kV^2$，（k为常数），求W的数学期望.

解： 风速V的概率密度为

$$f(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & 0<v<a\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$E(W)=E(kV^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}kv^2 f(v)dv$$

$$=\int_0^a kv^2\frac{1}{a}dv=\frac{1}{3}ka^2$$

§4.1 数学期望

案例3. 设某报童每日的潜在卖报数ζ服从参数为λ的泊松分布。如果每卖出一份报可得报酬a，卖不掉而退回则每份赔偿b。若某日该报童买进n份报，试求其期望所得，进一步求最佳的买进份数n。

解： 若记其真正卖报数为 ξ，则ξ 与 ζ 的关系为

$$\xi=\begin{cases}\zeta, & \zeta<n\\ n, & \zeta\geq n\end{cases}$$

这里ξ 服从**截尾泊松分布**，即

§4.1 数学期望

真正卖报数ξ 服从**截尾泊松分布**，即

$$P\{\xi = k\} = \begin{cases} \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, & k < n \\ \displaystyle\sum_{i=n}^{\infty} \dfrac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}, & k = n \end{cases}$$

记所得为η ，则

$$\eta = g(\xi) = \begin{cases} an, & \xi = n \\ a\xi - b(n-\xi) & \xi < n \end{cases}$$

§4.1 数学期望

因而，期望所得为

$$Eg(\xi)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}[ka-b(n-k)]+\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\right)na$$

$$=(a+b)\lambda\sum_{k=0}^{n-2}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}-n(a+b)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}+na$$

求 n 使 $E(g(\xi))$ 达到极大，这是一个典型的最优化问题.

当参数 a,b,λ 已知时，利用下式可求解出n的具体值

$$\sum_{k=r}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\int_0^1\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{\lambda}y^{r-1}e^{-y}dy$$

§4.1 数学期望

案例4. 设随机变量$X\sim N(u,\sigma^2)$，又设随机变量$Y=e^X$，求$E(Y)$。

解： 因为 $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}} dx$$

令 $\dfrac{x-u}{\sigma}=t$，则$x=u+\sigma t, dx=\sigma dt$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{u+\sigma t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt=e^{u+\frac{\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\sigma)^2}{2}} dt=e^{u+\frac{\sigma^2}{2}}$$

故 $$E(Y)=e^{u+\frac{\sigma^2}{2}}$$

§4.1 数学期望

二维随机向量的函数Z=g(X, Y)，其中X, Y为随机变量，g为连续函数

- 当(X, Y)为离散变量，满足分布律

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i, j=1,2,\cdots,$$

若如下求和级数绝对收敛，则数学期望存在且为

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

- 当X为连续变量，满足概率密度$f(x,y)$

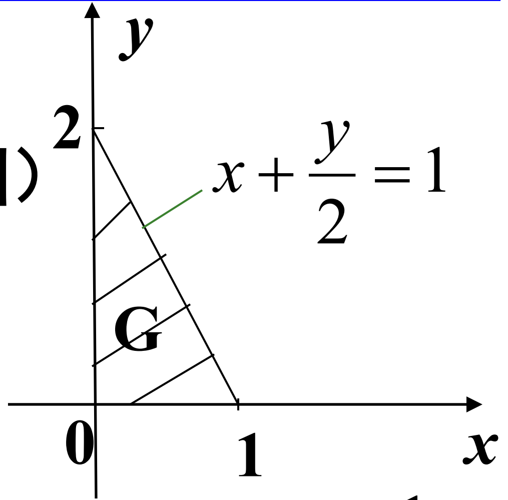
若如下二重积分绝对收敛，则数学期望存在且为

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$$

类似地，可以推广至多维随机向量的函数的期望计算

§4.1 数学期望

案例5. 设(X, Y)服从G上的均匀分布（如右图）求X、Y及XY的数学期望



解： 由题可知 $f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G\\ 0, & 其它\end{cases}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)}xdy=\int_0^1 2x(1-x)dx=\frac{1}{3}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)}ydy=\frac{2}{3}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{2(1-x)}xydy=\frac{1}{6}$$

§4.1 数学期望

案例6. 设(X, Y)在半圆域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1,y\ge 0\}$上服从均匀分布，求$X$，$Y$，$X^2Y$的数学期望。

解： 由题可知$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$$E(X)=\iint_D x\frac{2}{\pi}dxdy=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}xdx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}dy=0$$

$$E(Y)=\iint_D y\frac{2}{\pi}dxdy=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}ydy=\frac{4}{3\pi}$$

$$E(XY)=E(Y)=\iint_D x^2y\frac{2}{\pi}dxdy=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}x^2dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}ydy=\frac{4}{15\pi}$$

§4.1 数学期望

4.1.3 数学期望的性质

假设随机变量$\xi_i, i = 1,2,..$的数学期望均存在：

- 有界性

若 $a\le\xi\le b$，则$a\le E(\xi)\le b$. 特别地，$E(C) = C$, 这里C是常数

证明根据期望的定义，利用了求和/积分的有界性

§4.1 数学期望

- **线性性质**

对任意常数 $c_i, i=1,\cdots,n$ 及 b，有

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\xi_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i E\xi_i + b$$

$$\Downarrow$$

推论：和的期望等于期望的和

对任意n个随机变量ξ1,…,ξn，都有：

$$E(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n) = E\xi_1 + E\xi_2 + \ldots + E\xi_n$$

§4.1 数学期望

对于任意两个随机变量X和Y, 假设各个随机变量的数学期望都存在，则：

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

证明： 设$f(x,y)$, $f_X(x)$， $f_Y(y)$分别为(X,Y)的概率密度，以及关于X与Y的边缘概率密度，因为

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy$$

$$=E(X)+E(Y)$$

§4.1 数学期望

- **独立乘积的期望等于期望的乘积**

如果ξ1、…、ξn相互独立，则有：

$$E(\xi 1\times\xi 2\times\ldots\times\xi n)=E\xi 1\times E\xi 2\times\ldots\times E\xi n$$

证明：设$f(x,y)$, $f_X(x)$，$f_Y(y)$分别为(X,Y)的概率密度，以及关于X与Y的边缘概率密度，因为$f(x,y)=f_X(x)f(y)$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_X(x)f_Y(y)\,dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)\,dx+\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\,dx=E(X)E(Y)$$

注意：相互独立是充分条件而非必要条件！

§4.1 数学期望

案例7. 计算正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的期望.

解： 因为正态分布ξ可表示为

$$\xi = \mu + \sigma\xi_0 ，其中 \xi_0 \sim N(0,1)$$

利用期望的线性性质

$$E\xi = \mu + \sigma E(\xi_0) = \mu$$

§4.1 数学期望

案例8. 设随机变量$X\sim B(n,p)$，试由数学期望的性质求$E(X)$。

解： 注意到X为在n次独立重复试验中某事件A发生的次数，并且在每次试验中事件A发生的概率为p。现在引入下面的随机变量：

$$X_k=\begin{cases}1, & \text{第}k\text{次试验时事件}A\text{发生}\\ 0, & \text{第}k\text{次试验时事件}A\text{不发生}\end{cases}$$

由独立性可知：X_1，X_2，$\cdots$，X_n是相互独立，且有：

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n$$

§4.1 数学期望

案例8. 设随机变量$X\sim B(n,p)$，试由数学期望的性质求$E(X)$。

续： 因为

$$P\{X_k=1\}=P(A)=p,\quad P\{X_k=0\}=P(\bar{A})=1-p$$

故：

$$E(X_k)=1\times p+0\times(1-p)=p$$

所以：
$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)=np$$

§4.1 数学期望

案例9. 假定某人设计了如下一个赌局：每个人从有 3 张假币的 10 张 100 元纸币中随机地抽出 4 张。如果全是真的, 则赢得这 400元; 如果这 4 张中至少有一张假币, 只输 100 元。问这种规则是否公平，或者说你是否愿意参加?

解. 一个公平的赌博规则必须是双方的平均获利都等于 0。

以ξ 记每局赌博中庄家的获利 (可以为负)，满足分布律

x_k	- 400	100
p_k	$\frac{C_7^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

$$E\xi=(-\frac{400}{6})+\frac{500}{6}=\frac{50}{3}$$

赌博对庄家有利，平均每一局净赚 16.67 元。

§4.1 数学期望

案例10. 某机场大巴载有20名乘客自机场开出，途中有10个车站可以下车，如到达一站没旅客下车就不停车，假设每位旅客在各站下车是等可能的，且旅客之间在哪一站下车相互独立，以X表示停车次数，求E(X).

解 引入随机变量 $X_i=\begin{cases}0, & 第i站无人下车,\\ 1, & 第i站有人下车,\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,10$

令 $\mathrm{X}=\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+\cdots+\mathrm{X}_{10}$

$$P\{X_i=0\}=(\frac{9}{10})^{20}, P\{X_i=1\}=1-(\frac{9}{10})^{20}$$

$$E(X)=E(X_1+\cdots X_{10})=10\times(1-0.9^{20})\approx 8.784$$

§4.1 数学期望

案例11. 假定某公司开发了一种新产品，他们每卖出一件可获利500元，而积压一件将损失2000元，预计这种产品的销售量ξ服从参数0.00001 的指数分布，

$$p_1(x) = 0.00001\, e^{-0.00001x}, \quad x > 0.$$

问应该生产多少才能使得平均获利最大？

解. 如果生产c 件产品，则最终获利η：

$$\eta = \eta(c,\xi) = \begin{cases} 500\xi - 2000(c-\xi), & \text{当}\ \xi < c\ ; \\ 500c, & \text{当}\ \xi \ge c \end{cases}$$

§4.1 数学期望

(续) 平均获利即η 的数学期望为

$$E\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta(c,x)p_1(x)dx = \int_{-\infty}^{c} [500x - 2000(c-x)]p_1(x)dx + \int_{c}^{+\infty} 500cp_1(x)dx$$

$$= \int_{0}^{c} (2500x - 2000c)\lambda e^{-\lambda x}dx + 500c\int_{c}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$= \int_{0}^{c} (2500x - 2000c)\lambda e^{-\lambda x}dx + 500ce^{-\lambda c}$$

$$= -2500(ce^{-\lambda c} + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda c} - \frac{1}{\lambda}) - 2000c(1 - e^{-\lambda c}) + 500ce^{-\lambda c}$$

$$= 2500\frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda c}) - 2000c = 2500 \times 10000(1 - e^{-0.0001c}) - 2000c$$

§4.1 数学期望

(续) 即平均获利为:

$$Q(c)=2500\times 10000(1-e^{-0.00001c})-2000c$$

关于c的二阶导数 $-0.25e^{-0.00001c}<0$，因此

Q(c)具有极大值，令

$$\frac{\mathrm{d}Q(c)}{\mathrm{d}c}=0.$$

解出 $c=-10000\times\ln(2000/2500)=2231.4$,

即要使平均获利最大，应该生产2231件产品。

§4.2 方差

4.2.1 方差与标准差

案例分析： 设甲、乙两名射击运动员在一次射击比赛中打出的环数分别为X和Y，并且有如下的分布律：

$$X:\begin{pmatrix}10 & 9 & 8 & 7\\ 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1\end{pmatrix}\qquad Y:\begin{pmatrix}10 & 9 & 8\\ 0.25 & 0.5 & 0.25\end{pmatrix}$$

可知$E(X)=E(Y)=9$，但是进一步分析可知：乙比甲在比赛中波动更小，表现更为稳定，从这个意义上乙优于甲。

§4.2 方差

4.2.1 方差与标准差

定义 设X是一随机变量，若$E\{[X-E(X)]^2\}$存在，则称其为随机变量X的**方差**，记为$D(X)$或$\mathrm{Var}(X)$.

方差的算术平方根$\sqrt{D(X)}$称为**均方差**或**标准差**。

意义 方差反映了随机变量的取值与平均值的**偏离**程度.

§4.2 方差

（1）用定义计算方差

离散随机变量的方差：

$$D(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k,$$

连续随机变量的方差：

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

§4.2 方差

（2）用公式计算方差

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

证明

$$\begin{aligned}D(X)&=E\{[X-E(X)]^2\}\\&=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}\\&=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2\\&=E(X^2)-[E(X)]^2\\&=E(X^2)-E^2(X).\end{aligned}$$

§4.2 方差

计算常见分布的方差

(1) 0-1分布：

X	0	1
p_k	$1-p$	p

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2=p(1-p)$$

$$EX=p,DX=p(1-p).$$

(2) 二项分布： $X\sim b(n,p)$.

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n$$

$$E(X)=np,D(X)=np(1-p).$$

§4.2 方差

因为： $E(X)=np$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^k p^k q^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\left(k+1-1\right)kC_n^k p^k q^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(k-1\right)kC_n^k p^k q^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}kC_n^k p^k q^{n-k}$$

$$=\sum_{k=2}^{n}\left(k-1\right)kC_n^k p^k q^{n-k}+np$$

$$=n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}C_{n-2}^{k-2}p^{k-2}q^{(n-2)-(k-2)}+np$$

$$=n(n-1)p^2+np$$

所以： $D(X)=E(X^2)-\left(E\left(X\right)\right)^2=np(1-p).$

§4.2 方差

(3) 泊松分布： $X \sim P(\lambda)$ $P\{X=k\}=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$k=0,1,2,\cdots$

$$E(X)=\lambda,$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\lambda^{k-1}e^{-\lambda}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda(E(X)+1)=\lambda^2+\lambda$$

$$\therefore D(X)=\lambda$$

§4.2 方差

(4) 均匀分布: $X \sim U(a,b)$

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx$$

$$=\int_a^b\frac{x^2}{b-a}dx=\frac{x^3}{3(b-a)}\Bigg|_a^b=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$$

$$=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

§4.2 方差

(5) 指数分布： $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ $\quad p(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

$$E(X)=\frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2p(x)dx=\int_0^{\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=-\int_0^{\infty}x^2d(e^{-\lambda x})=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}d(x^2)$$

$$=2\int_0^{\infty}xe^{-\lambda x}d(x)=\frac{2}{\lambda}E(X)=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$\therefore D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

§4.2 方差

(6) 正态分布： $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ $\quad p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty$

$$DX=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 p(x)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}z^2 e^{-z^2/2}dz$$

$$=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}ze^{-z^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}dz=\sigma^2.$$

$$\therefore E(X)=\mu\,,\ D(X)=\sigma^2$$

特别，当 $X \sim N(0,1), E(X)=0, D(X)=1.$

§4.2 方差

常见分布的数学期望与方差表：

(1) 二项分布， $E\xi=np$， $D\xi=npq$；

Bernoulli 分布： $E\xi=p$， $D\xi=pq$；

(2) Pascal分布， $E\xi=r/p$， $D\xi=rq/p^2$；

(3) Poisson分布， $E\xi=\lambda$， $D\xi=\lambda$；

(4) 均匀分布， $E\xi=(a+b)/2$， $D\xi=(b-a)^2/12$；

(5) Gamma分布， $E\xi=\alpha/\lambda$， $D\xi=\alpha/\lambda^2$；

指数分布： $E\xi=1/\lambda$， $D\xi=1/\lambda^2$；

卡方分布： $E\xi=n$， $D\xi=2n$；

(6) 正态分布， $E\xi=\mu$， $D\xi=\sigma^2$。

§4.2 方差

案例12 射击教练将从他的两名队员中选择一人参加比赛，应该是甲还是丙更合适？

成绩(环数)	8	9	10
甲的概率	0.1	0.3	0.6
丙的概率	0.2	0.1	0.7

解 这里甲、丙两人的平均成绩都是

$$E_{甲} = E_{丙} = 9.5$$

两人方差为： $D_{甲} = 0.45, D_{丙} = 0.65$

因此，应该选择甲队员去参加比赛

§4.2 方差

4.2.2 方差的性质

(1) $D(C)=0$, (C为常数)

(2) $D(aX+b)=a^2 D(X)$, (a,b为常数)

(3) $D(X \pm Y)=D(X)+D(Y) \pm 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

若X与Y相互独立，则 $D(X \pm Y)=D(X)+D(Y)$

注意，独立是充分条件而非必要条件

(4) $D(X)=0 \Leftrightarrow P\{X=C\}=1$,其中$C=E(X)$.

§4.2 方差

(3) $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

若X与Y相互独立，则 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

注意，独立是充分条件而非必要条件

证 $[(X\pm Y)-E(X\pm Y)]^2$

$$=[X-E(X)]^2\pm 2[X-E(X)][Y-E(Y)]+[Y-E(Y)]^2$$

上式两端取期望，并根据期望性质可得：

$$D(X\pm Y)=E\{[(X\pm Y)-E(X\pm Y)]^2\}$$

$$=E\{[X-E(X)]^2\pm 2[X-E(X)][Y-E(Y)]+[Y-E(Y)]^2\}$$

$$=D(X)\pm 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}+D(Y)$$

§4.2 方差

(3) $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

若X与Y相互独立，则 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

注意，独立是充分条件而非必要条件

续 当X与Y相互独立时，$X-E(X)$和$Y-E(X)$也相互独立：

$$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$
$$=E[X-E(X)]E[Y-E(Y)]=0$$

即 $$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$$

§4.2 方差

引理 马尔可夫(Markov)不等式

设X为随机变量，若$E(|X|^r)<\infty \quad (r>0)$，

则对任意正数ε，有

$$P\{|X|\geq\varepsilon\}\leq\frac{E(|X|^r)}{\varepsilon^r}$$

下面以X为连续随机变量为例进行证明，离散变量的证明类似

证

$$P\{|X|\geq\varepsilon\}=\int_{|x|\geq\varepsilon}f(x)dx\leq\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{|x|^r}{\varepsilon^r}f(x)dx\leq\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|^r f(x)}{\varepsilon^r}dx=\frac{E(|X|^r)}{\varepsilon^r}.$$

§4.2 方差

(4) $D(X)=0 \Longleftrightarrow P\{X=E(X)\}=1$.

证

- **必要性** $P\{X=E(X)\}=1$，等价于单点分布

  故 $D(X)=0$

- **充分性**

  已知 $D(X)=0$

  在Markov不等式中令r=2并以X-EX代替X，得

$$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{E(|X-E(X)|^2)}{\varepsilon^2}=\frac{D(X)}{\varepsilon^2}=0$$

故 $\forall\varepsilon>0,$有$P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}=0$

§4.2 方差

(续) $P\{X=E(X)\}=1-P\{|X-E(X)|\neq 0\}$

而 $\{|X-E(X)|\neq 0\}=\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{|X-E(X)|\geq \frac{1}{n}\}$

且 $\{|X-E(X)|\geq \frac{1}{n}\}\subset\{|X-E(X)|\geq \frac{1}{n+1}\},(n=1,2,\ldots)$

由概率的连续性，得

$$P\{|X-E(X)|\neq 0\}=\lim_{n\to+\infty}P\{|X-E(X)|\geq \frac{1}{n}\}=0$$

所以 $P\{X=E(X)\}=1-P\{|X-E(X)|\neq 0\}=1$，证毕

§4.2 方差

(5) 若$c \neq E\xi$，则$D\xi < E(\xi - c)^2$

证

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E[(\xi - c) + (c - E\xi)]^2$$

$$= E[(\xi - c)]^2 + E[(c - E\xi)]^2 + 2E[(\xi - c)(c - E\xi)]$$

$$= E[(\xi - c)]^2 + (c - E\xi)^2 + 2(c - E\xi)(E\xi - c)$$

$$= E[(\xi - c)]^2 - (c - E\xi)^2$$

§4.2 方差

(6) Chebyshev不等式

对于任何具有有限期望与方差的随机变量ξ，都有

$$P\{|\xi - E\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

其中ε 是任一正数。

证 若 $F(x)$是ξ的分布函数，则显然有

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty}(x - E\xi)^2 \mathrm{d}F(x) \geq \int_{|x-E\xi|\geq\varepsilon}(x - E\xi)^2 \mathrm{d}F(x)$$

$$\geq \int_{|x-E\xi|\geq\varepsilon} \varepsilon^2 \mathrm{d}F(x) = \varepsilon^2 P\{|\xi - E\xi| \geq \varepsilon\}.$$

§4.2 方差

Chebyshev不等式的意义：利用随机变量 ξ 的数学期望及方差对 ξ 的概率分布进行估计。 它断言不管 ξ 的分布是什么，ξ 落在 $(E\xi-\sigma\delta, E\xi+\sigma\delta)$ 中的概率均不小于 $1-1/\delta^2$.

从这里也可以看出方差是描述随机变量与其期望值离散程度的一个量。

§4.2 方差

案例13 已知$X\sim b(n,p)$，求$D(X)$。

解：$X_i=\begin{cases}1 & \text{如第}i\text{次试验成功},\\ 0 & \text{如第}i\text{次试验失败},\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n.$

则$X=X_1+X_2+\cdots X_n$，且$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互则独立。

易见$X_i\sim b(1,p)$，则$D(X_i)=p(1-p)$,

所以，$D(X)=D(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=np(1-p).$

注意，利用方差和的性质时要注意相互独立的条件

§4.2 方差

案例14 袋中有 N 张卡片，各记以数字 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_N$，不放回地从中抽出 n 张，求其和的数学期望和方差。

解： 取一张时，其数字ξ的分布

$$P\{\xi = Y_l\} = \frac{1}{N}, l = 1, 2, \cdots, N$$

均值及方差分别为：

$$E(\xi) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i = \bar{Y}, D\xi = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \bar{Y})^2 = \sigma^2.$$

若以 η_n 记n张卡片的数字之和，以$\xi_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 记第i次抽得的卡片上的数字，则 $\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$.

§4.2 方差

(续) 由于抽签与顺序无关，因此

$$P\{\xi_i = Y_l\} = \frac{1}{N}, l = 1, 2, \cdots, N, i = 1, 2, \cdots, n$$

故 $E\xi_i = \bar{Y}, \quad D\xi_i = \sigma^2.$

所以 $E\eta_n = E\xi_1 + E\xi_2 + \cdots + E\xi_n = n\bar{Y}$

$$D\eta_n = \sum_{i=1}^{n} D\xi_i + 2\sum_{1\le i<j\le n} \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = n\sigma^2 + n(n-1)\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)$$

(*)

§4.2 方差

(续) 在(*)式中令$n=N$，这时$\eta_N=Y_1+Y_2+\cdots+Y_N$是一个常数，

因此 $D\eta_N=0$，于是 $N\sigma^2+N(N-1)\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)=0$

因而 $\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)=-\dfrac{\sigma^2}{N-1}$.

最后得到：$D\eta_n=n\sigma^2-\dfrac{n(n-1)\sigma^2}{N-1}=\dfrac{n(N-n)\sigma^2}{N-1}$.

与有放回抽取的方差 $n\sigma^2$相比，多出了一个因子 $\dfrac{N-n}{N-1}$，称为有限总体修正因子。

当 $n=1$时，它等于1；而当$n=N$时，它取值为0。这与直觉符合。

§4.3 协方差与相关系数 矩

4.3.1 协方差

定义 设(X,Y)为二维随机变量，若$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$存在，则称其为随机变量X与Y的协方差，记为$\mathrm{Cov}(X,Y)$

意义 反映了二维随机变量(X,Y)是否具有相同的变化趋势，正值对应相同趋势

§4.3 协方差与相关系数 矩

4.3.1 协方差

对于多维随机向量$(X_1, \cdots, X_n)$，它的每一个分量X_i是一个一维随机变量。因此，除了可以讨论它的数学期望和方差外，人们还希望了解分量之间相互关系的数字特征。

定义 设(X, Y)为二维随机向量，$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$存在，则称它为X与Y的协方差，记作$\mathrm{Cov}(X, Y)$，即：

$$\mathrm{Cov}(X, Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

§4.3 协方差、相关系数与矩

(1) 用定义计算协方差

- 若(X,Y)为**离散型**, $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}$, 则

$$Cov(X,Y)=\sum_{i,j}[x_i-E(X)][y_j-E(Y)]p_{ij}$$

- 若(X,Y)为**连续型**, 其概率密度为$f(x,y)$, 则

$$Cov(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)][y-E(Y)]f(x,y)dxdy$$

§4.3 协方差、相关系数与矩

(2) 用公式计算协方差

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y);$$

证

$$=E[XY-YE(X)-XE(Y)+E(X)E(Y)]$$

$$=E(XY)-2E(X)E(Y)+E(X)E(Y)$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y).$$

§4.3 协方差、相关系数与矩

案例15 设联合分布(X,Y)具有概率密度:

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0\le x\le y\le 1,\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$ 求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

解

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_x^1 x\cdot 8xydy=\frac{8}{15}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_x^1 y\cdot 8xydy=\frac{4}{5}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_0^1dx\int_x^1 xy\cdot 8xydy=\frac{4}{9}$$

$$Cov(X,Y)=\frac{4}{9}-\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{15}=\frac{4}{225}$$

§4.3 协方差、相关系数与矩

协方差的性质

(1) $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$;

(2) $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\mathrm{Cov}(X,Y)$， a,b 为常数;

(3) $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$.

(4) 若X与Y独立，则 $\mathrm{Cov}(X, Y)=0$.　反之不成立

(5) $\mathrm{Cov}(X,X)=D(X)$；

§4.3 协方差、相关系数与矩

在证明更多的性质前，先证明一条常用的不等式

定理（Cauchy-Schwarz不等式）

对任意的随机变量ξ 与η，如果$E\xi^2 < +\infty, E\eta^2 < +\infty,$

则有

$$|E\xi\eta|^2 \le E\xi^2 \cdot E\eta^2$$

等式成立当且仅当 $P\{\eta = t_0\xi\} = 1,$

这里t_0是任意常数。

§4.3 协方差、相关系数与矩

证 对任意的实数t, 构造

$$u(t)=E(t\xi-\eta)^2=t^2E\xi^2-2tE\xi\eta+E\eta^2$$

显然对一切 $t, u(t)\geq 0$，因此二次方程 $u(t)=0$ 或者没有实根或者有一个重根。所以

$$[E\xi\eta]^2-E\xi^2\cdot E\eta^2\leq 0$$

此外, 方程 $u(t)=0$ 有一个重根 t_0 存在的充要条件是

$$[E\xi\eta]^2-E\xi^2\cdot E\eta^2=0$$

这时，$E(t_0\xi-\eta)^2=0$，因此$P\{t_0\xi-\eta=0\}=1.$

§4.3 协方差、相关系数与矩

协方差的性质

已知Cauchy-Schwarz不等式：

$$[E(XY)]^2 \le E(X^2)E(Y^2)$$

将上式X,Y替换为X-$E(X)$，Y-$E(Y)$,即得：

(6) $[Cov(X,Y)]^2 \le D(X)D(Y)$

§4.3 协方差、相关系数与矩

4.3.1 相关系数

协方差$\mathrm{Cov}(X,Y)$是有量纲的量，例如：X表示人的身高，单位是m，Y表示人的体重，单位是kg，则$\mathrm{Cov}(X,Y)$的量纲是$\mathrm{m}\cdot\mathrm{kg}$。为了消除量纲的影响，现在对协方差除以相同量纲的量，即得到了我们所研究的相关系数。

§4.3 协方差、相关系数与矩

4.3.1 相关系数

定义 称 $\rho_{XY}=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$ 为X与Y的相关系数

补充

相关系数就是标准化的随机变量$X^*=\dfrac{X-EX}{\sqrt{DX}}$ 与$Y^*=\dfrac{Y-EY}{\sqrt{DY}}$ 的协方差，即：

$$\operatorname{cov}\left(X^*,\ Y^*\right)=\operatorname{cov}\left(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}},\frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}\right)=\frac{\operatorname{cov}\left(X,\ Y\right)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\rho_{XY}$$

§4.3 协方差、相关系数与矩

4.3.1 相关系数的性质

(1) $|\rho_{XY}| \leq 1.$

(2) $|\rho_{XY}| = 1$的充要条件是：存在常数 a, b 使

$$P\{Y = aX + b\} = 1.$$

由(2)可知 不等式成立当且仅当Y跟X几乎有线性关系. 这说明了相关系数的概率意义. ρ_{XY}并不是刻画X, Y之间的"一般"关系, 而是刻画X, Y之间线性相关程度.

§4.3 协方差、相关系数与矩

4.3.1 相关系数的性质

证明2： 首先，$|\rho(x,y)|=1$等价于$[\mathrm{Cov}(X,Y)]^2=D(X)D(Y)$，

考虑如下一元二次方程：

$$t^2D(X)+2t\mathrm{Cov}(X,Y)+D(Y)=0$$

则$|\rho(x,y)|=1$表示上述方程有两个相等的实根，即

$$t_0^2D(X)+2t_0\mathrm{Cov}(X,Y)+D(Y)=0$$

等价于：$$E\left\{\left[t_0\left(X-E(X)\right)+\left(Y-E(Y)\right)\right]^2\right\}=0$$

§4.3 协方差、相关系数与矩

4.3.1 相关系数的性质

续： 又因为：$E\left[t_0\left(X-E(X)\right)+\left(Y-E(Y)\right)\right]=0$

故上式等价于：

$$D\left[t_0\left(X-E(X)\right)+\left(Y-E(Y)\right)\right]=0$$

根据方差的性质可知，上式成立的充要条件为：

$$P\left[t_0\left(X-E(X)\right)+\left(Y-E(Y)\right)=0\right]=1$$

只要取：$a=t_0E(X)+E(Y)$，$b=-t_0$，即可证明性质2。

§4.3 协方差、相关系数与矩

4.3.1 相关系数的性质

（3）对随机变量ξ与η, 下面的事实等价：

$$X,Y\text{不相关}\Leftrightarrow \rho_{XY}=0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X,Y)=0$$

$$\Leftrightarrow E(XY)=E(X)E(Y)$$

$$\Leftrightarrow D(X+Y)=D(X)+D(Y).$$

§4.3 协方差、相关系数与矩

两变量不相关与独立的关系

相互独立 $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ 不相关

相互独立定义

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y) \text{ 或 } P(x,y)=P_X(x)P_Y(y)$$

特例 对于两正态分布或两二元分布，不相关与相互独立等价

在具体问题中，还可以构造不可拆解的等式来说明两变量不独立

比如对 $\xi=\cos\theta,\ \eta=\cos(\theta+a),$

因为 $\xi^2+\eta^2=1,$ ξ与η不独立

§4.3 协方差、相关系数与矩

案例16 设随机变量(X,Y)的联合概率分布列为

X \ Y	-1	0	1
-1	1/12	5/12	0
1	2/12	3/12	1/12

试分析随机变量(X, Y)的相关性和独立性。

解：$\because \quad \mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$

$$=1\cdot\frac{1}{12}+(-1)\cdot\frac{2}{12}+1\cdot\frac{1}{12}-\left[(-1)\cdot\frac{6}{12}+1\cdot\frac{6}{12}\right]\left[(-1)\cdot\frac{3}{12}+1\cdot\frac{1}{12}\right]$$

$$=0$$

$\therefore X$与Y不相关。

§4.3 协方差、相关系数与矩

X \ Y	-1	0	1
-1	1/12	5/12	0
1	2/12	3/12	1/12

(续) 又$\because P\{X=-1\}=\dfrac{1}{2}, P\{Y=1\}=\dfrac{1}{12}, P\{X=-1,Y=1\}=0$

$$P\{X=-1,Y=1\}\neq P\{X=-1\}\cdot P\{Y=1\}$$

$\therefore X$与Y不独立。

§4.3 协方差、相关系数与矩

案例17 设(X,Y)均匀分布在以坐标原点为中心，R为半径的圆的内部，试分析则随机变量X与Y的相关性和独立性.

解 由已知得

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi R^2}, & x^2+y^2\le R^2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dxdy=\int_{-R}^{+R}dy\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}}x\frac{1}{\pi R^2}dx=0$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)dxdy=\int_{-R}^{+R}dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}y\frac{1}{\pi R^2}dy=0$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy=\int_{-R}^{+R}dx\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}xy\frac{1}{\pi R^2}dy=0$$

§4.3 协方差、相关系数与矩

(续) 根据期望可得 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$

所以 $\rho_{XY}=0$，X与Y不相关

且

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, & -R\le x\le R\\ 0, & 其它\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}, & -R\le y\le R\\ 0, & 其它\end{cases}$$

所以 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，X与Y不相互独立

§4.3 协方差、相关系数与矩

案例18 设二维随机向量$(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$，求$\rho(X,Y)$.

解 由第三章知识可知：$X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$，$Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$，从而有：

$$E(X)=\mu_1, D(X)=\sigma_1^2; E(X)=\mu_2, D(X)=\sigma_2^2$$

$$Cov(X,Y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)\cdot$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left[\frac{\left(x-\mu_1\right)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{\left(x-\mu_1\right)\left(y-\mu_2\right)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\left(y-\mu_2\right)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}dxdy$$

§4.3 协方差、相关系数与矩

案例18 设二维随机向量$(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right)$，求$\rho(X,Y)$.

续 因为：

$$\frac{\left(x-\mu_1\right)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{\left(x-\mu_1\right)\left(y-\mu_2\right)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{\left(y-\mu_2\right)^2}{\sigma_2^2}=\left[\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\frac{\rho\left(y-\mu_2\right)}{\sigma_2}\right]^2+\left(\sqrt{1-\rho^2}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2$$

令：$u=\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}-\dfrac{\rho\left(y-\mu_2\right)}{\sigma_2},v=\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}$ $\quad dxdy=|J|dudv=\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}dudv$

所以：$Cov(X,Y)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma_1\sigma_2\left(\rho v+\sqrt{1-\rho^2}u\right)v\exp\left\{-\frac{u^2+v^2}{2}\right\}dudv$

§4.3 协方差、相关系数与矩

案例18 设二维随机向量$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，求$\rho(X,Y)$.

续 又因为：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} uv\exp\left\{-\frac{u^2+v^2}{2}\right\}dudv=\int_{-\infty}^{+\infty} u\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}du\int_{-\infty}^{+\infty} v\exp\left\{-\frac{v^2}{2}\right\}dv=0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} v^2\exp\left\{-\frac{u^2+v^2}{2}\right\}dudv=\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}du\int_{-\infty}^{+\infty} v^2\exp\left\{-\frac{v^2}{2}\right\}dv=2\pi$$

故 $Cov(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2$ 即：

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\rho$$

§4.3 协方差、相关系数与矩

拓展知识：现代证券组合理论

Markovitz的均值--方差模型成了现代证券组合理论的基石：

- 一个相当自然的**假定**是：投资者都追求高收益而规避风险，也即希望有高的均值而不愿有大的方差。
- 但是，证券市场的历史记录表明，高收益常伴随着高风险。**根本的出路在于采用证券组合，即把全部资金分散投资于各种证券。**
- 已知有 n 种证券可以投资，并把它们的收益率看作是随机变量，通常记为 $r_1,\cdots,r_n$，相应的均值和方差分别记为 $\bar{r}_1,\cdots,\bar{r}_n$ 和 $\sigma_1^2,\cdots,\sigma_n^2$，并以 ρ_{ij} 记 r_i 与 r_j 的相关系数。

§4.3 协方差、相关系数与矩

假定投资于上述 n 种证券的资金的比例分别为 $w_1,\cdots,w_n$.

则总的收益率为 $r_p=\sum_{i=1}^{n}w_ir_i$, 显然其平均收益率为 $\bar{r}_p=Er_p=\sum_{i=1}^{n}w_i\bar{r}_i$,

而方差则为 $\sigma_p^2=Dr_p=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_iw_j\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$

因此寻找最优证券组合的问题转化为:

求投资比例 $w_1,\cdots,w_n$, 使 $\bar{r}_p$ 等于某个目标值而 σ_p^2 达到最小,
或者 σ_p^2 控制在一个可以接受的水平而使 $\bar{r}_p$ 达到最大。

该模型兼顾了金融市场中收益和风险两大要素，而且形式简便，也因此获得了1990年度的诺贝尔经济学奖

§4.3 协方差、相关系数与矩

4.3.2 矩

数学期望, 方差, 协方差是随机变量常用的数字特征, 它们都是某种矩。

定义1 对正整数k，称$m_k = E\xi^k$为k阶原点矩.

数学期望是一阶原点矩。

定义2 对正整数k，称$c_k = E(\xi - E\xi)^k$为k阶中心矩.

方差是二阶中心矩。

定理. 中心矩和原点矩可相互表达。

§4.3 协方差、相关系数与矩

案例19 设ξ 为服从正态分布 $N(0,\sigma^2)$，求其k阶原点矩和k阶中心矩。

解： 密度函数为 $p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-x^2/(2\sigma^2)}$，$E\xi=0$,

故原点矩和中心矩相同

$$m_k=c_k=E\xi^k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-x^2/(2\sigma^2)}dx$$

当k为奇数时，$c_k=0$

当k为偶数时，$c_k=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^k}{\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sigma^k\cdot 2^{\frac{k-1}{2}}\int_0^{\infty}z^{\frac{k-1}{2}}e^{-z}dz$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^k\cdot 2^{\frac{k-1}{2}}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)=\sigma^k(k-1)(k-3)\cdots 3\cdot 1$$

(续) 推广：若 ξ为服从正态分布N(μ, σ^2)，

其 k 阶中心矩:

当k为奇数时，$c_k = 0;$

当k为偶数时，$c_k = \sigma^k (k-1)(k-3)\cdots 3\cdot 1.$

其k 阶原点矩：

$$m_k = E\xi^k = E[(\xi - m_1) + m_1]^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} c_{k-i} \mu^i .$$

§4.3 协方差、相关系数与矩

4.3.3 协方差矩阵

定义 设 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为n维随机向量，记

$$\sigma_{ij}=\operatorname{cov}(X_i,X_j),i,j=1,2,\cdots,n.$$

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn}\end{bmatrix}$$为$(X_1,\cdots,X_n)$的协方差矩阵，

简记作DX.

§4.3 协方差、相关系数与矩

4.3.3 协方差矩阵

性质

1、$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$，所以Σ是一个对称矩阵。

2、对角线上元素就是X_i的方差。

3、协方差矩阵是一个非负定矩阵。

事实上，对任何实数 $t_j\ (j=1,2,\cdots,n)$ 有

$$\sum_{j,k}\sigma_{jk}t_jt_k=\sum_{j,k}\operatorname{cov}(t_jX_j,t_kX_k)=D\left(\sum_{j=1}^{n}t_jX_j\right)\geq 0.$$

因而，对于协方差矩阵 Σ 有：$\det\Sigma\geq 0.$

谢谢大家！